Тест 3 2025/2026

Время на тест 210 минут. При выполнении теста ЗАПРЕЩАЕТСЯ пользоваться калькулятором. **В заданиях А6 и А10 возможны два и более вариантов ответа.**

<table>
<tr><td>А1</td><td>Выберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{67}$.</td><td>1) 7,9 и 8,2;
2) 9 и 10;
3) 7 и 8;
4) 8 и 9;
5) $\sqrt{66}$ и $\sqrt{68}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:
Чтобы найти два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{67}$, нужно найти такие близлежащие числа, корень из которых извлекается.
$\sqrt{64} < \sqrt{67} < \sqrt{81}$ $\quad 8 < \sqrt{67} < 9$.
Ответ: 4.</td></tr>
<tr><td>А2</td><td>Если у призмы 8 граней, то её основанием является:
1) семиугольник; 2) восьмиугольник; 3) пятиугольник;
4) шестиугольник; 5) четырёхугольник.</td><td>1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:
Если у призмы 8 граней, то её основанием является шестиугольник.
Ответ: 4.</td></tr>
<tr><td>А3</td><td>Из данных уравнений выберите то, которое имеет бесконечно много корней:
1) $2x = 0$; 2) $0 \cdot x = 0$; 3) $0 \cdot x = 1$;
4) $-3x = -3$; 5) $x = 0$.</td><td>1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:
Все уравнения являются линейными.
Линейное уравнение $a \cdot x = b$:
имеет единственный корень, если $a \neq 0$;
не имеет корней, если $a = 0, \quad b \neq 0$;
имеет бесконечно много корней, если $a = 0, \quad b = 0$.
Линейное уравнение $0 \cdot x = 0$ имеет бесконечно много корней.
Ответ: 2.</td></tr>
<tr><td>А4</td><td>Найдите, при каком значении x значение выражения $-2(4x+1)$ на 19 больше значения суммы $7x$ и 9.</td><td>1) 2;
2) -2;
3) $-\frac{8}{15}$;
4) $-\frac{1}{2}$;
5) $\frac{8}{15}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:
По тексту задачи составим уравнение:
$-2(4x+1) - 19 = 7x + 9$; $\quad -8x - 2 - 19 - 7x - 9 = 0$; $\quad -15x = 30$; $\quad x = -2$.
Ответ: 2.</td></tr>
</table>

А5	Укажите решение двойного неравенства: $-3 \le 1-3x-x^2 < \frac{13}{4}$.	1)$(-\infty;+\infty)$ 2) $(-\infty;-4] \cup [1;+\infty)$; 3) $[-4;1]$; 4)$(-\infty;-1{,}5) \cup (-1{,}5;+\infty)$; 5) $[-4;-1{,}5) \cup (-1{,}5;1]$.

Решение:

Двойное неравенство $-3 \le 1-3x-x^2 < \frac{13}{4}$ равносильно системе неравенств

$\begin{cases} 1-3x-x^2 < \frac{13}{4} \\ 1-3x-x^2 \ge -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 4-12x-4x^2 < 13 \\ 4-3x-x^2 \ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x^2+12x+9 > 0 \\ x^2+3x-4 \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (2x+3)^2 > 0 \\ (x+4)(x-1) \le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ne -1{,}5 \\ x \in [-4;1] \end{cases}$;

$x \in [-4;-1{,}5) \cup (-1{,}5;1]$.

Ответ: **5**.

А6	Из перечисленных тел выберите тела вращения: 1) шар; 2) пирамида; 3) усечённый конус; 4) цилиндр; 5) параллелепипед.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

Решение:

Тела вращения: шар, усечённый конус, цилиндр.

Ответ: **1;3;4**.

А7	Первый пешеход проходит некоторое расстояние AB за 5 ч, а второй – за 7 ч. Какую часть расстояния АВ им нужно будет ещё пройти до встречи, если пешеходы одновременно вышли из пунктов А и В навстречу друг другу и двигались 2ч?	1) $\frac{24}{35}$; 2) $\frac{5}{7}$; 3) $\frac{5}{14}$; 4) $\frac{11}{35}$; 5) $\frac{1}{4}$.

Решение:

За 1 ч первый пешеход проходит $\frac{1}{5}$ часть пути АВ, а второй $\frac{1}{7}$ часть АВ.

Тогда за 2 ч первый пройдёт $\frac{2}{5}$, а второй $\frac{2}{7}$ всего пути АВ, и им останется пройти до встречи:

$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{7}\right) = 1-\frac{2\cdot7+2\cdot5}{35} = 1-\frac{24}{35} = \frac{11}{35}$ часть.

Ответ: **4**.

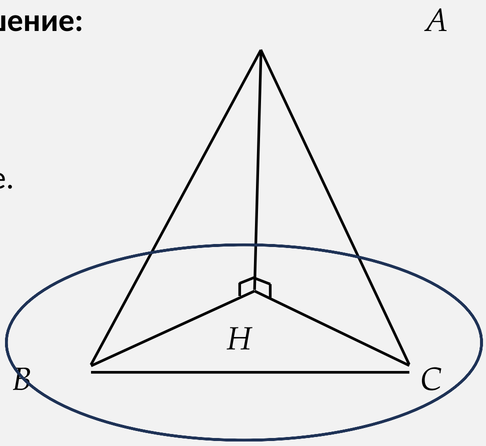
А8	Сколько целых решений неравенства $log_2(3x+1) \le 1$ на промежутке $[-5;5]$.	1) 5; 2) 6; 3) 1; 4) 4; 5) 2.

Решение:

$log_2(3x+1) \le 1$; $\begin{cases} 3x+1 \le 2 \\ 3x+1 > 0 \end{cases}$ (основание логарифма $2 > 1$, то знак неравенства не меняется)

$\begin{cases} 3x \le 1 \\ 3x > -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$; $x \in (-\frac{1}{3};\frac{1}{3}]$. На данном промежутке одно целое решение. Это ноль.

Ответ: **3**.

<table>
<tr><td>A9</td><td>Из точки А к плоскости проведены две наклонные АВ и АС, равные 12 и 18. Найдите длину меньшей из проекций наклонных, если одна из проекций на 10 больше другой.</td><td>1) 3;
2) 5;
3) 6;
4) 14;
5) 4.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:


По условию АВ $= 12$, АС $= 18$.
Большей наклонной соответствует большая проекция.
Т.к. АС $>$ АВ, то СН $>$ ВН.
Т.к. $AH \perp HC$; $AH \perp HB$, то ΔAHB и ΔAHC прямоугольные.
По т. Пифагора $AH^2 = AB^2 - BH^2$ (для ΔAHB);
$AH^2 = AC^2 - HC^2$ (для ΔAHC)
$AB^2 - BH^2 = AC^2 - HC^2$
Пусть $BH = x$, $CH = x + 10$, тогда
$12^2 - x^2 = 18^2 - (x+10)^2$;
$144 - x^2 = 324 - x^2 - 20x - 100$; $x = 4$
Ответ: 5.</td></tr>
<tr><td>A10</td><td>Укажите неверные равенства:
1) $(5x - y)^2 = 5x^2 - 10xy + y^2$
2) $(-a - 7b)^2 = (a + 7b)^2$
3) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - xy = (y - \frac{x}{2})^2$
4) $(m+4)^2 = m^2 + 16$
5) $(3 + 2c)(2c - 3) = 9 - 4c^2$</td><td>1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение:
1)$(5x - y)^2 = 25x^2 - 10xy + y^2 \neq 5x^2 - 10xy + y^2$
2)$(-a - 7b)^2 = (-(a + 7b))^2 = (-1)^2(a+7b)^2 = (a+7b)^2 -$ верно
3) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - xy = (\frac{1}{2})^2x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{1}{2}xy = \left(\frac{x}{2} - y\right)^2 = \left(y - \frac{x}{2}\right)^2$ – верно
4) $(m+4)^2 = m^2 + 8m + 16 \neq m^2 + 16$
5) $(3 + 2c)(2c - 3) = 4c^2 - 9 \neq 9 - 4c^2$
Ответ: 1;4;5.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>B1</td><td>Для функции $y = -\frac{3}{x+1}$ выберите неверные утверждения.
1) Областью определения данной функции являются все числа, кроме – 1 .
2) Графиком функции является парабола.
3) Функция имеет один нуль функции.
4) График функции пересекает ось ординат в точке (0; - 3).
5) Данная функция нечётная.
6) $y(2) < 0$.
Ответ запишите цифрами в порядке возрастания. Например: 123</td></tr>
<tr><td></td><td>Решение:
1)Областью определения данной функции являются все числа, кроме – 1. Верно.
2) Графиком функции является парабола. Неверно. Графиком будет гипербола.
3) Функция имеет один нуль функции. Неверно. Данная функция нулей не имеет.
4) График функции пересекает ось ординат в точке (0; - 3). Верно.
5) Данная функция нечётная. Неверно. Функция ни чётная ни нечётная.
6) $y(2) < 0$. Верно.
Ответ: 235</td></tr>
</table>

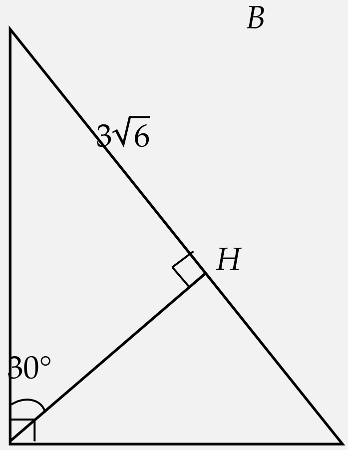
B2

Для начала каждого из предложений А – В подберите его окончание 1 – 6 так, чтобы получилось верное утверждение.

Начало предложения	Окончание предложения
В прямоугольном $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, CH – высота, проведенная к гипотенузе, $BH = 3\sqrt{6}$, $\angle BCH = 30°$. А) длина стороны BC $\triangle ABC$ равна… Б) длина стороны AC $\triangle ABC$ равна… В) расстояние от точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$ до стороны AB равно …	1) $6\sqrt{30}$; 2) $12\sqrt{6}$; 3) $6\sqrt{6}$; 4) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 5) $9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$; 6) $18\sqrt{2}$.

Ответ запишите в виде сочетания букв и цифр, соблюдая алфавитную последовательность букв левого столбца. Помните, что некоторые данные правого столбца могут использоваться несколько раз или не использоваться вообще. Буквы в ответе вводятся заглавными при помощи русской раскладки клавиатуры.
Например: А1Б1В4.

Решение:



Из $\triangle CBH$ $\angle B = 90° - 30° = 60°$; $BC = 2 \cdot BH = 6\sqrt{6}$

Из прямоугольного $\triangle CBA$ $\angle A = 90° - 60° = 30°$;

$AB = 2 \cdot BC = 12\sqrt{6}$.

$$AC = AB\cos\angle A = 12\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2}.$$

Т.к. точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной окружности, то искомое расстояние равно r.

$$r = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2}P_{ABC}} = \frac{BC \cdot AC}{BC + AC + AB} = \frac{6\sqrt{6} \cdot 18\sqrt{2}}{6\sqrt{6} + 18\sqrt{2} + 12\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{12\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$$

$$= 9\sqrt{2} - 3\sqrt{6}.$$

Ответ: А3Б6В5.

B3

Вычислите $(15 + 3^{1+\log_3 9}) \cdot \log_2\sqrt{3} \cdot \log_3 4$.

Решение:

$$\left(15 + 3^{1+\log_3 9}\right) \cdot \log_2\sqrt{3} \cdot \log_3 4 = \left(15 + 3 \cdot 3^{\log_3 9}\right) \cdot \log_2 3^{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 2^2 =$$

$$= (15 + 3 \cdot 9) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = (15 + 27) \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 42.$$

Использовали равенство $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Ответ: 42.

B4

В четырёхугольнике $ABCD$ AB = 6, AD = 10, CD = $2\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.
Найдите длину стороны BC.

Решение:

Проведём отрезок BD.

В $\triangle ABD$ по теореме косинусов найдём BD^2

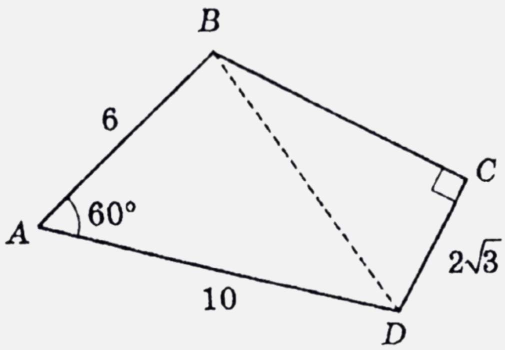
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot cos A =$

$= 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot cos 60^\circ = 76$

В $\triangle BCD$ по т. Пифагора

$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{76 - (2\sqrt{3})^2} = 8.$

Ответ: 8.



B5	Найдите произведение двух натуральных чисел, сумма которых равна 85, а наименьшее общее кратное равно 102.

Решение:

Формула НОД$(x;y) \cdot$НОК$(x;y) = x \cdot y$ упрощает решение задачи.

Т.к. $85 = 5 \cdot 17$, а $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, то искомые числа делятся на 17.

НОД$(x;y) = 17$, НОК$(x;y) = 102$

$x \cdot y =$ НОД$(x;y) \cdot$НОК$(x;y) = 17 \cdot 102 = 1734.$

Ответ: 1734.

B6	Найдите значение выражения $\left(\frac{sin 49^\circ - cos 79^\circ}{1 - 2sin^2 35{,}5^\circ}\right)^2$.

Решение:

$$\left(\frac{sin 49^\circ - cos 79^\circ}{1 - 2sin^2 35{,}5^\circ}\right)^2 = \left(\frac{sin 49^\circ - \cos\ (90^\circ - 11^\circ)}{sin^2 35{,}5^\circ + cos^2 35{,}5^\circ - 2sin^2 35{,}5^\circ}\right)^2 = \left(\frac{sin 49^\circ - \sin 11^\circ}{cos^2 35{,}5^\circ - sin^2 35{,}5^\circ}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2sin \frac{49^\circ - 11^\circ}{2} \cdot \cos \frac{49^\circ + 11^\circ}{2}}{\cos\ (2 \cdot 35{,}5^\circ)}\right)^2 = \left(\frac{2sin 19^\circ \cdot \cos 30^\circ}{cos 71^\circ}\right)^2 = \left(\frac{2sin 19^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\ (90^\circ - 19^\circ)}\right)^2 = \left(\frac{2sin 19^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 19^\circ}\right)^2$$

$= (\sqrt{3})^2 = 3.$

Ответ: 3.

B7	Найдите число А, если известно, что оно составляет 30% от 70% числа 1800.

Решение:

Число А составляет 30% от неизвестного числа В.

Составим пропорцию: А – 30% откуда А $= \frac{\text{В} \cdot 30\%}{100\%} = 0{,}3 \cdot$В.

В – 100%,

Число В составляет 70% от числа 1800.

Составим ещё одну пропорцию: 1800 – 100% откуда В $= \frac{1800 \cdot 70\%}{100\%} = 1260.$

В – 70%,

Значит, искомое А $= 0{,}3 \cdot 1260 = 378.$

Ответ: 378.

B8	График функции $y = f\,(x)$ получен из графика функции $g\,(x) = 3x^2$ смещением его на 4 единичных отрезка влево вдоль оси абсцисс и на 2 единичных отрезка вниз вдоль оси ординат. Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = f(x)$ и прямой $x = 5$.

Решение:

График функции $y = f(x)$,полученный из графика функции $g(x) = 3x^2$ смещением его на 4 единичных отрезка влево вдоль оси абсцисс и на 2 единичных отрезка вниз вдоль оси ординат, имеет вид $f(x) = 3\cdot(x+4)^2 - 2$.

Т.к. график функции $f(x) = 3\cdot(x+4)^2 - 2$ и прямая $x = 5$ пересекаются в точке с абсциссой равной 5, то $f(5) = 3\cdot(5+4)^2 - 2 = 3\cdot 81 - 2 = 241$.

Ответ: 241.

B9 Найдите первый член возрастающей геометрической прогрессии (a_n), если $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8$, а $a_1 + a_2 + a_3 = 7$.

Решение:

В геометрической прогрессии $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\begin{cases} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 8 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 = 8 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^3 q^3 = 8 \\ a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1 q = 2 \\ a_1 + 2 + 2q = 7 \end{cases}$;

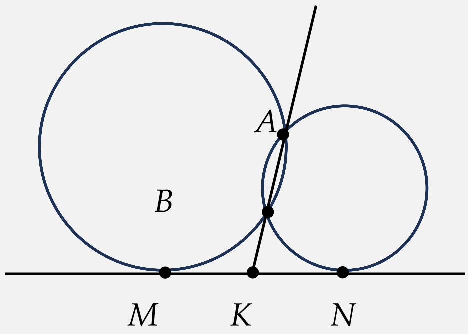
$\begin{cases} a_1 q = 2 \\ a_1 = 5 - 2q \end{cases}$; $\begin{cases} (5-2q)\cdot q = 2 \\ a_1 = 5 - 2q \end{cases}$; $2q^2 - 5q + 2 = 0$; $q_1 = \frac{1}{2}$ $q_2 = 2$.

Т.к. прогрессия возрастающая, то $q_2 = 2$, а $a_1 = 1$

Ответ: 1.

B10 Продолжение общей хорды АВ двух окружностей пересекает их общую касательную MN в точке К. Найдите расстояние MN между точками касания, если АВ = 9, ВК = 3.

Решение:



Воспользуемся тем, что произведение секущей на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной.
АК – секущая, КМ – отрезок касательной, ВК – внешняя часть секущей

МК^2 = АК·ВК; МК^2 $= (9+3)\cdot 3 = 12\cdot 3 = 36$

МК = 6.

Аналогично NK^2 = АК·ВК $= 6$

$MN = MK + NK = 6 + 6 = 12$

Ответ: 12.

B11 Найдите количество корней уравнения $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.

Решение:

$\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$; $\begin{cases} (\sqrt{x^4 - 2x - 5})^2 = (1-x)^2; \\ 1 - x \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^4 - 2x - 5 = 1 - 2x + x^2 \\ x \le 1 \end{cases}$

Решим биквадратное уравнение $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Обозначим $x^2 = t \ge 0$ $t^2 - t - 6 = 0$ $t_1 = -2 < 0$; $t_2 = 3$; $x^2 = 3$; $x = \pm\sqrt{3}$

Условию $x \le 1$ удовлетворяет $x = -\sqrt{3}$.

Уравнение имеет один корень.

Ответ: 1.

B12 Бассейн может наполниться водой из двух кранов за 6 часов. Если один из них закрыть на 2 часа раньше, то заполнится 80% бассейна. За какое время может наполниться бассейн из каждого крана в отдельности? В ответ запишите сумму этих времён в часах.

Решение:

Пусть производительность первого крана $\frac{1}{x}$, а второго $\frac{1}{y}$, тогда

$\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1 \\ \frac{6}{x}+\frac{4}{y}=0{,}8. \end{cases}$ Обозначим $\frac{1}{x}=n;\quad \frac{1}{y}=m,$

тогда $\begin{cases} 6n+6m=1 \\ 6n+4m=0{,}8 \end{cases}$ $\begin{cases} 6n+6m=1 \\ 2m=0{,}2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6n+6m=1 \\ m=0{,}1 \end{cases}$ $\begin{cases} n=\frac{1}{15} \\ m=\frac{1}{10} \end{cases}$ $\begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}$

15 + 10 = 25.

Ответ: 25.

B13	Отрезок МА является перпендикуляром к плоскости прямоугольника $ABCD$. Угол между прямой МС и этой плоскостью равен $30°$, AD = $\sqrt{2}$, $CD = 2$. Найдите градусную меру двугранного угла между плоскостями (MCD) и (CDA).

Решение:

Отрезок МА – перпендикуляр к плоскости прямоугольника $ABCD$, МС – наклонная, АС – проекция наклонной МС на плоскость $ABCD$.

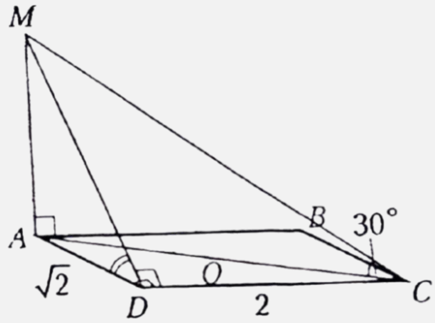
$\angle MCA = \angle(MC;(ABC))$, т.е. $\angle MCA = 30°$

Плоскости (MCD) и (CDA) пересекаются по прямой CD.

Т.к. $ABCD$ – прямоугольник, то $CD \perp AD$.

По теореме о трёх перпендикулярах $MD \perp CD$,

$\angle MDA$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями MCD и CDA, т.е. $\angle MDA$ – искомый.



Из прямоугольного $\triangle ADC$ по т. Пифагора

АС $=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}.$

Рассмотрим прямоугольный $\triangle MAD$ $\quad AM = AC\cdot tg\angle MCA=\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}.$

В прямоугольном $\triangle MAD$ $\quad AM = AD = \sqrt{2}$, значит $\triangle MAD$ – равнобедренный, тогда $\angle MDA = 45^\circ$

Ответ: **45.**

B14	Решите неравенство $\left(15^{x^2-5x+6}\right)^{\frac{1}{x-2}} < log_3(3cos2\pi)$. В ответ запишите наибольшее целое решение.

Решение:

Вычислим $log_3(3cos2\pi) = log_3(3\cdot 1) = log_3 3 = 1$

$\left(15^{x^2-5x+6}\right)^{\frac{1}{x-2}} < 1;\quad \left(15^{x^2-5x+6}\right)^{\frac{1}{x-2}} < 15^0;$

т.к. $15>1$, то $\frac{x^2-5x+6}{x-2}<0;\quad \frac{(x-2)(x-3)}{x-2}<0;\quad \begin{cases} x-3<0 \\ x-2\neq 0 \end{cases};\quad \begin{cases} x<3 \\ x\neq 2 \end{cases};\quad x\in(-\infty;2)\cup(2;3)$

Наибольшее целое решение: 1

Ответ: **1.**

B15	Решите уравнение $tg^2x = tgx$. В ответ запишите количество корней уравнения на промежутке $[0;2\pi]$.

Решение:

$tg^2x = tgx$ Не вздумайте разделить на tgx!

$tg^2x - tgx = 0;$ $tgx(tgx-1)=0;$ $tgx = 0$ или $tgx = 1$

$tgx = 0;$ $x = \pi n,$ $n \in Z$

$tgx = 1;$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

На отрезке $[0;2\pi]$ пять корней: $x = 0;$ $x = \frac{\pi}{4};$ $x = \pi;$ $x = \frac{5\pi}{4};$ $x = 2\pi.$

Ответ: 5.

B16	Решите неравенство $\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2}$. В ответ запишите произведение целых решений неравенства на промежутке $[-7;7]$.

Решение:

$\frac{a}{a^2+1} \le \frac{1}{2};$ $\frac{a}{a^2+1} - \frac{1}{2} \le 0;$ $\frac{2a-a^2-1}{2(a^2+1)} \le 0;$ $\frac{-(a^2-2a+1)}{2(a^2+1)} \le 0;$ $\frac{a^2-2a+1}{2(a^2+1)} \ge 0;$ $\frac{(a-1)^2}{2(a^2+1)} \ge 0$

Данная дробь неотрицательна при любых значениях переменной. Т.е. $a \in R$.

В отрезок $[-7;7]$ входит целое число ноль, значит произведение целых решений данного неравенства будет равно нулю.

Ответ: 0.

B17	В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами AC $=6$ и CB $=10$. Сечение, проходящее через катет AC и среднюю линию другого основания, наклонено к основанию призмы под углом $60°$. Найдите площадь сечения.

Решение:

Т.к. MN – средняя линия $\triangle A_1C_1B_1$, то $A_1C_1 = 2MN;$

$A_1C_1 \| MN$; $MN = 3$

$A_1C_1 \| MN;$ $A_1C_1 \| AC,$ тогда $AC \| MN,$

искомое сечение – трапеция $AMNC$.

Построим линейный угол двугранного угла,

который образует секущая плоскость с плоскостью основания.

Проведём $NN_1 \perp CB,$ NC – наклонная, CN_1 – проекция

$CN_1 = \frac{1}{2}CB = 5.$

т.к. $AC \perp, CN_1$ ($\triangle ABC$ – прямоугольный),

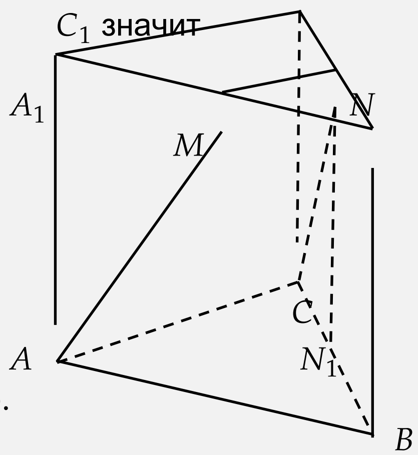
то $AC \perp NC$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

$\angle NCN_1 = 60°$

Из $\triangle NCN_1$ $CN = 2CN_1$ (катет лежащий напротив угла $30°$).

Трапеция $AMNC$ прямоугольная и CN её высота, $CN = 10.$

Площадь сечения $S_{AMNC} = \frac{MN+AC}{2} \cdot CN = \frac{6+3}{2} \cdot 10 = 45.$



Ответ: 45.

B18	Найдите значение выражения $24a + b$, где a – наибольшее отрицательное, а b – наименьшее положительное решения неравенства $log_2(3x+1) \cdot log_{0,5}(6x+2) \le -6.$

Решение:

$log_2(3x+1) \cdot log_{0,5}(6x+2) \le -6;$ $log_2(3x+1) \cdot (-log_2 2(3x+1)) \le -6;$

$-log_2(3x+1) \cdot (log_2 2 + log_2(3x+1)) \le -6;$ $-log_2(3x+1) \cdot (1 + log_2(3x+1)) \le -6;$

$log_2(3x+1) \cdot (1 + log_2(3x+1)) \ge 6$

Обозначим $log_2(3x+1) = t,$ тогда

$t(1+t) \ge 6;$ $t^2 + t - 6 \ge 0;$ $(t+3)(t-2) \ge 0;$ $t \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$

$log_2(3x+1) \le -3$ или $log_2(3x+1) \ge 2$

$0 < 3x+1 \le \frac{1}{8}$ $3x+1 \ge 4$

$-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{7}{24}$ $\qquad\qquad\qquad$ $x \geq 1$

Т.о. $x \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{24}\right] \cup [1; +\infty)$

наибольшее отрицательное решение: $-\frac{7}{24}$; наименьшее положительное решение: 1.

$24a + b = 24 \cdot \left(-\frac{7}{24}\right) + 1 = -6.$

Ответ: -6.

B19	Найдите удвоенное произведение наибольшего и наименьшего значений функции $f(x) = \frac{2}{x+1} - 4$ на отрезке $[1;3]$.

Решение:

$f(x) = \frac{2}{x+1} - 4$. Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Найдём производную $f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$; $\quad -\frac{2}{(x+1)^2} = 0$; это уравнение не имеет корней.

Так как нет значений переменной, при которых производная функции равна нулю, то свои наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка.

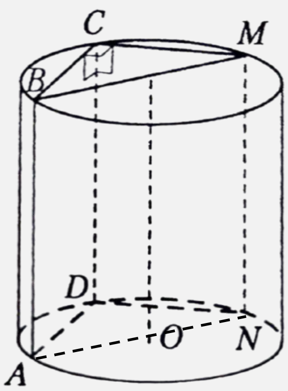
$f(1) = \frac{2}{1+1} - 4 = -3$; $\qquad f(3) = \frac{2}{3+1} - 4 = -3\frac{1}{2}$

$-3 \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$; $\qquad 2 \cdot 10\frac{1}{2} = 21.$

Ответ: 21.

B20	Через образующую цилиндра проведены две такие взаимно перпендикулярные плоскости, что площади полученных сечений равны $5\sqrt{2}$ каждая. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

Решение:



Прямоугольники $ABCD$ и CDNM – сечения цилиндра плоскостями, проходящими через образующую CD.

Прямые ВС и СМ лежат в плоскости верхнего основания цилиндра, а CD – перпендикуляр к плоскости верхнего основания цилиндра, значит, $CD \perp BC$ и $CD \perp CM$.

Т.к. плоскости сечений пересекаются по прямой CD, то $\angle$ВСМ – линейный угол двугранного угла между плоскостями сечений, тогда $\angle$ВСМ $= 90^\circ$.

$S_{ABCD} = S_{CDNM}$ и CD – общая сторона, то ВС $=$ СМ.

Рассмотрим ΔВСМ – равнобедренный, прямоугольный, $\angle CBM = \angle CMB = 45^\circ$.

Окружность верхнего основания цилиндра описана около ΔВСМ, $\angle$ВСМ $= 90^\circ$, тогда

$sin45^\circ = \frac{BC}{BM}$; $\quad BM = \frac{BC}{sin45^\circ} = \frac{2BC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}BC$

$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 5\sqrt{2}$; $\qquad S_{ABMN} = AB \cdot BM = AB \cdot BC\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10.$

Ответ: 10.